5. Věty o pevném bodě a Nashova rovnováha

5.1 Věty o pevném bodě

DEFINICE

Nechť M je množina, $f: M \to M$ a $x^* \in M$. Řekneme, že x^* je pevným bodem zobrazení f, jestliže platí $f(x^*) = x^*$.

VĚTA 5.1 (Brouwer, 1910)

Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná kompaktní konvexní množina a $f: K \to K$ je spojitá. Potom má f pevný bod.

DŮKAZ PRO $f: [0,1] \to [0,1]$

Položme $g(x) = f(x) - x$, $x \in [0,1]$. Potom $g(0) \geq 0$ a $g(1) \leq 0$, a tedy existuje x^* takové, že $g(x^*) = 0$, neboť g je spojitá. Potom $f(x^*) = x^*$. ∎

PŘÍKLADY

(1) $f(x) = x + 1$ nemá pevný bod

(2) vhodná rotace mezikruží nemá pevný bod.

VĚTA 5.2 (Kakutani, 1941)

Nechť K je neprázdná kompaktní konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, $f: K \to P(K)$, a pro každé $x \in K$ je $f(x)$ neprázdná kompaktní konvexní množina a f má uzavřený graf, tj.

$$\{(x, y);\ y \in f(x),\ x \in K\}$$

je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Potom existuje $x^* \in K$ takové, že $x^* \in f(x^*)$.

5.2 Nashova rovnováha

John Nash (1928-2015)

PŘÍKLAD (hra kámen-nůžky-papír)

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & q_1 & q_2 & q_3 \\
 & & K & N & P \\
p_1 & K & 0 & 1 & -1 \\
p_2 & N & -1 & 0 & 1 \\
p_3 & P & 1 & -1 & 0
\end{array}
$$

$p_i \geq 0, \ \sum p_i = 1 \ \ldots \ P$

$q_i \geq 0, \ \sum q_i = 1 \ \ldots \ Q$

OBECNĚ

$A = (a_{ij}) \in M(n \times m), \ B = (b_{ij}) \in M(n \times m)$

$V_1(p, q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j$ ... zisk hráče 1

$V_2(p, q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} p_i q_j$ ... zisk hráče 2

DEFINICE

Řekneme, že (p^*, q^*) je Nashova rovnováha (v předchozí hře), jestliže platí

$$\forall p \in P : V_1(p^*, q^*) \geq V_1(p, q^*),$$
$$\forall q \in Q : V_2(p^*, q^*) \geq V_2(p^*, q).$$

VĚTA 5.3 (Nash, 1950)

Existuje Nashova rovnováha.

DŮKAZ

Definujme $f : P \times Q \to \mathcal{P}(P \times Q)$ předpisem

$$(\tilde{p}, \tilde{q}) \in f(p, q) \overset{def}{\iff} V_1(\tilde{p}, q) = \max_{p'} V_1(p', q),$$
$$V_2(p, \tilde{q}) = \max_{q'} V_2(p, q').$$

Uvedená maxima existují, neboť V_1, V_2 jsou spojité a P, Q jsou kompaktní. Ověříme předpoklady Kakutaniho věty. Zvolme nejprve $p \in P$ a $q \in Q$. Množina $f(p, q)$ je neprázdná podle předchozího. Ověříme její konvexit[illegible] Nechť $(\tilde{p}, \tilde{q}), (\bar{p}, \bar{q}) \in f(p, q)$.

Potom pro $t \in \langle 0,1 \rangle$ platí:

$$V_1(t\tilde{p} + (1-t)\bar{p}, q) = tV_1(\tilde{p}, q) + (1-t)V_1(\bar{p}, q)$$

$$= t \max_{p'} V_1(p', q) + (1-t) \max_{p'} V_1(p', q)$$

$$= \max_{p'} V_1(p', q).$$

Podobně dostaneme $V_2(p, t\tilde{q} + (1-t)\bar{q}) = \max_{q'} V_2(p, q')$.
Odtud plyne, že

$$t(\tilde{p}, \tilde{q}) + (1-t)(\bar{p}, \bar{q}) \in f(p, q).$$

Zbývá ukázat, že graf f je uzavřený. Uvažujme posloupnost $(p_n, q_n, \tilde{p}_n, \tilde{q}_n) \longrightarrow (p, q, \tilde{p}, \tilde{q})$, kde $(\tilde{p}_n, \tilde{q}_n) \in f(p_n, q_n)$. Díky kompaktnosti máme $p, \tilde{p} \in P$ a $q, \tilde{q} \in Q$.